CAPÍTULO 6. TORQUE Y EQUILIBRIO DE CUERPO RÍGIDO.

En general un cuerpo puede tener tres tipos distintos de movimiento simultáneamente. De traslación a lo largo de una trayectoria, de rotación mientras se está trasladando, en este caso la rotación puede ser sobre un eje que pase por el cuerpo, y si a la vez este eje esta girando en torno a un eje vertical, a la rotación del eje del cuerpo rotante se le llama movimiento de precesión (por ejemplo un trompo), y de vibración de cada parte del cuerpo mientras se traslada y gira. Por lo tanto el estudio del movimiento puede ser en general muy complejo, por esta razón se estudia cada movimiento en forma independiente.

Cuando un cuerpo está en rotación, cada punto tiene un movimiento distinto de otro punto del mismo cuerpo, aunque como un todo se esté moviendo de manera similar, por lo que ya no se puede representar por una partícula. Pero se puede representar como un objeto extendido formado por un gran número de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración. Al tratar la rotación del cuerpo, el análisis se simplifica si se considera como un objeto rígido y se debe tener en cuenta las dimensiones del cuerpo.

Cuerpo rígido. Se define como un cuerpo ideal cuyas partes (partículas que lo forman) tienen posiciones relativas fijas entre sí cuando se somete a fuerzas externas, es decir es no deformable. Con esta definición se elimina la posibilidad de que el objeto tenga movimiento de vibración. Este modelo de cuerpo rígido es muy útil en muchas situaciones en las cuales la deformación del objeto es despreciable.

El movimiento general de un cuerpo rígido es una combinación de movimiento de traslación y de rotación. Para hacer su descripción es conveniente estudiar en forma separada esos dos movimientos.

6.1 TORQUE DE UNA FUERZA.

Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. La propiedad de la fuerza para hacer girar al cuerpo se mide con una magnitud física que llamamos ***torque o momento*** de la fuerza. Se prefiere usar el nombre torque y no momento, porque este último se emplea para referirnos al momento lineal, al momento angular o al momento de inercia, que son todas magnitudes físicas diferentes para las cuales se usa el mismo término.

Analizaremos cualitativamente el efecto de rotación que una fuerza puede producir sobre un cuerpo rígido. Consideremos como cuerpo rígido a una regla fija en un punto *O* ubicado en un extremo de la regla, como se muestra en la figura 6.1, sobre el cual pueda tener una rotación, y describamos el efecto que alguna fuerza de la misma magnitud actuando en distintos puntos, produce sobre la regla fija en *O*. La fuerza $\mathbf{F_1}$ aplicada en el punto *a* produce en torno a *O* una rotación en sentido antihorario, la fuerza $\mathbf{F_2}$ aplicada en el punto *b* produce una rotación horaria y con mayor rapidez de rotación que en *a*, la fuerza $\mathbf{F_3}$ aplicada en *b*, pero en la dirección de la línea de acción que pasa por *O*, no produce rotación (se puede decir que $\mathbf{F_3}$ 'empuja' a la regla sobre *O*, pero no la mueve), $\mathbf{F_4}$ que actúa inclinada en el punto *b* produce una rotación horaria, pero con menor rapidez de rotación que la que produce $\mathbf{F_2}$; $\mathbf{F_5}$ y $\mathbf{F_6}$ aplicadas perpendiculares a la regla, saliendo y entrando en el plano de la figura respectivamente, no producen rotación. Por lo tanto existe una cantidad que produce la rotación del cuerpo rígido relacionada con la fuerza, que es lo que definimos como el ***torque*** de la fuerza.

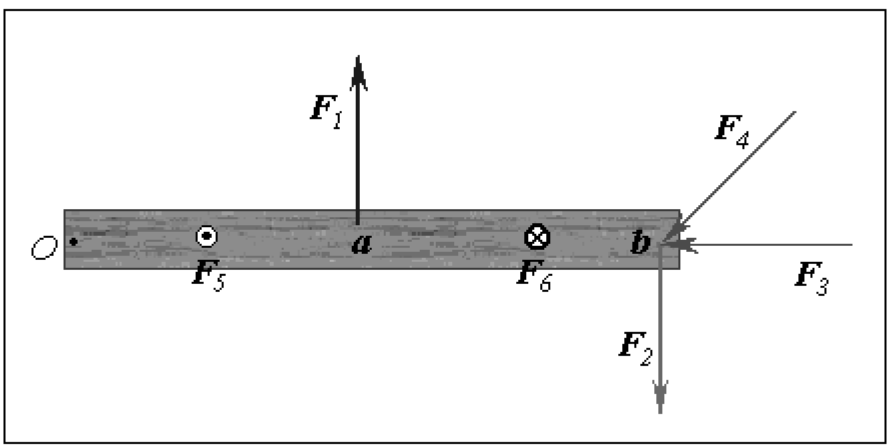


Figura 6.1

Se define el ***torque*** τ de una fuerza ***F*** que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido, en una posición ***r*** respecto de cualquier origen *O*, por el que puede pasar un eje sobre el cual se produce la rotación del cuerpo rígido, al producto vectorial entre la posición ***r*** y la fuerza aplicada ***F***, por la siguiente expresión:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad (6.1)$$

El *torque* es una magnitud vectorial, si α es el ángulo entre ***r*** y ***F***, su valor numérico, por definición del producto vectorial, es:

$$\boxed{\tau = r(F sen\alpha)} \qquad (6.2)$$

su dirección es siempre perpendicular al plano de los vectores ***r*** y ***F***, cuyo diagrama vectorial se muestra en la figura 6.2, su sentido esta dado por la regla del producto vectorial, la regla del sentido de avance del tornillo o la regla de la mano derecha. En la regla de la mano derecha los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de ***r*** y luego se giran hacia ***F*** a través del ángulo α, la dirección del pulgar derecho estirado da la dirección del torque y en general de cualquier producto vectorial.

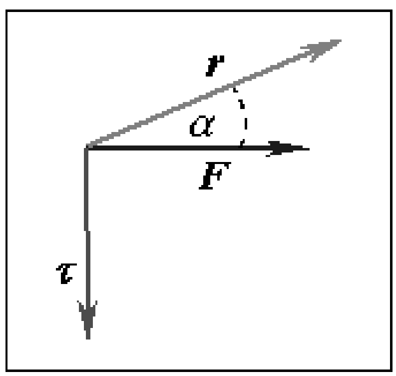


Figura 6.2

Por convención se considera el torque positivo (negativo) si la rotación que produciría la fuerza es en sentido antihorario (horario); esto se ilustra en la figura 6.3. La unidad de medida del torque en el SI es el *Nm* (igual que para trabajo, pero no se llama joule).

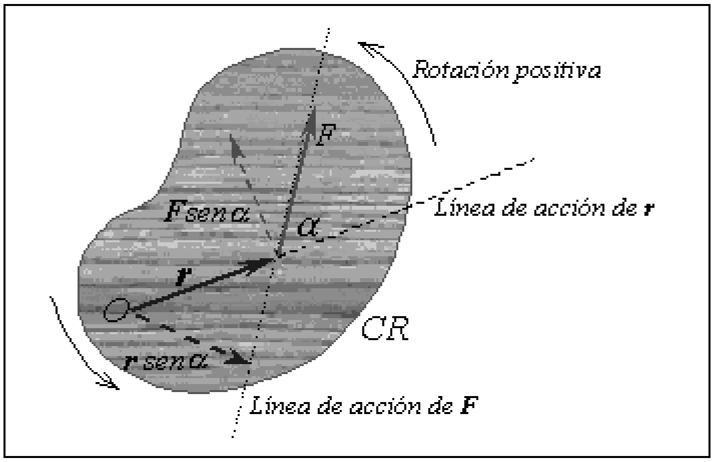


Figura 6.3

El torque de una fuerza depende de la magnitud y dirección de ***F*** y de su punto de aplicación respecto a un origen *O*. Si la fuerza ***F*** pasa por *O*, ***r*** = 0 y el torque es cero. Si α = 0 o 180º, es decir, ***F*** está sobre la línea de acción de ***r***, *Fsen*α = 0 y el torque es cero. *F sen*α es la componente de ***F*** perpendicular a ***r***, sólo esta componente realiza torque, y se le puede llamar $F_\perp$. De la figura 6.3 también se ve que $r_\perp = r\,sen\alpha$ es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza, a $r_\perp$ se le llama *brazo de palanca* de ***F***. Entonces, la magnitud del torque se puede escribir como:

$$\tau = r(Fsen\alpha) = F(rsen\alpha) = rF_\perp = r_\perp F$$

Ejemplo 6.1: *Calcular el torque respecto al origen, producido por una fuerza* ***F*** *= (4i - 5j) N, que se aplica a un objeto en la posición* ***r*** *= (2i + j) m.*

Solución: Aplicando la definición de producto vectorial, se obtiene:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = 0\hat{i} - 0\hat{j} - 14\hat{k} = \text{-14}\hat{k}\text{Nm}$$

Ejemplo 6.2: *Calcular el torque neto por los puntos A y por B en el sistema de la figura 6.4, donde* $F_1 = 10$ *N,* $F_2 = 5$ *N,* $F_3 = 15$ *N,* $a = 50$ *cm,* $b = 1$ *m.*

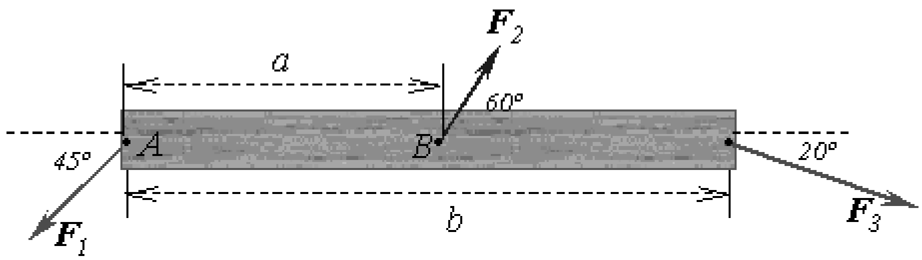


Figura 6.4 Ejemplo 6.2.

Solución: el torque neto es la suma de los torques realizados por cada fuerza. Los puntos *A* y *B* se consideran ejes de rotación en forma independiente, por supuesto no simultáneamente, por lo tanto los torque se calculan en forma separada en cada punto.

Para rotación en torno al punto A, considerando el sentido de la rotación que produce cada fuerza, lo que le da el signo al torque, se tiene:

$\tau_A = F_1 r_1 sen45 + F_2 r_2 sen60 - F_3 r_3 sen20$

los valores de las distancias son: $r_1 = 0$, $r_2 = a = 0.5$ m, $r_3 = b = 1$ m.

$\tau_A = (10)(0) sen45 + (5)(0.5) sen60 - (15)(1) sen20 = -3$ Nm

Para rotación en torno al punto B, considerando el sentido de la rotación:

$\tau_B = + F_1 r_1 sen45 + F_2 r_2 sen60 - F_3 r_3 sen20$

ahora los valores de las distancias son: $r_1 = a = 0.5$ m, $r_2 = 0$, $r_3 = b - a = 0.5$ m.

$\tau_B = (10)(0.5) sen45 + (5)(0) sen60 - (15)(0.5) sen20 = 1$ Nm

6.2 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO.

Por definición una partícula puede tener solo movimiento de traslación. Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula está moviéndose con velocidad constante o está en reposo; en este último caso se dice que está en equilibrio estático. Pero el movimiento de un cuerpo rígido en general es de traslación y de rotación. En este caso, si la resultante tanto de las fuerzas como de los torques que actúan sobre el cuerpo rígido es cero, este no tendrá aceleración lineal ni aceleración angular, y si está en reposo, estará en ***equilibrio estático***. La rama de la mecánica que estudia el equilibrio estático de los cuerpos se llama ***estática***.

Para que un cuerpo rígido este en equilibrio estático se deben cumplir dos requisitos simultáneamente, llamados ***condiciones de equilibrio***. La primera condición de equilibrio es la Primera Ley de Newton, que garantiza el equilibrio de traslación. La segunda condición de equilibrio, corresponde al equilibrio de rotación, se enuncia de la siguiente forma: "la suma vectorial de todos los torques externos que actúan sobre un cuerpo rígido alrededor de cualquier origen es cero". Esto se traduce en las siguientes dos ecuaciones, consideradas como las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

1ª condición de equilibrio:

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0} \tag{6.3}$$

2ª condición de equilibrio:

$$\boxed{\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots + \vec{\tau}_n = 0} \tag{6.4}$$

Como estas ecuaciones vectoriales son equivalentes a seis ecuaciones escalares, resulta un sistema final de ecuaciones con seis incógnitas, por lo que limitaremos el análisis a situaciones donde todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, están en el plano *xy*, donde también obviamente se encuentra ***r***. Con esta restricción se tiene que tratar sólo con tres ecuaciones escalares, dos de la primera condición de equilibrio y una de la segunda, entonces el sistema de ecuaciones vectorial (6.3) y (6.4) se reduce a las siguientes ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau_O = 0$$

Cuando se tratan problemas con cuerpos rígidos se debe considerar la fuerza de gravedad o el peso del cuerpo, e incluir en los cálculos el torque producido por su peso. Para calcular el torque debido al peso, se puede considerar como si todo el peso estuviera concentrado en un solo punto, llamado *centro de gravedad.* Se han preguntado alguna vez ¿por qué no se cae la Torre de Pisa?, o ¿por qué es imposible tocarte los dedos de los pies sin caerte cuando estas de pie apoyado con los talones contra la pared? ¿Por qué cuando llevas una carga pesada con una mano, extiendes y levantas el otro brazo? Para responder a esto debemos definir los conceptos de centro de masa y de centro de gravedad y su aplicación al equilibrio estático.

6.2.1 Centro de gravedad.

Debido a que un cuerpo es una distribución continua de masa, en cada una de sus partes actúa la fuerza de gravedad. El ***centro de gravedad*** es la posición donde se puede considerar actuando la fuerza de gravedad neta, es el punto ubicado en la posición promedio donde se concentra el peso total del cuerpo. Para un objeto simétrico homogéneo, el centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico, pero no para un objeto irregular.

6.2.2 Centro de masa.

Es la posición geométrica de un cuerpo rígido donde se puede considerar concentrada toda su masa, corresponde a la posición promedio de todas las partículas de masa que forman el cuerpo rígido. El centro de masa de cualquier objeto simétrico homogéneo, se ubica sobre un eje se simetría.

Cuando se estudia el movimiento de un cuerpo rígido se puede considerar la fuerza neta aplicada en el centro de masa y analizar el movimiento del centro de masa como si fuera una partícula. Cuando la fuerza es el peso, entonces se considera aplicado en el centro de gravedad. Para casi todos los cuerpos cerca de la superficie terrestre, el centro de masa es equivalente al centro de gravedad, ya que aquí la gravedad es prácticamente constante, esto es, si ***g*** es constante en toda la masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Existen métodos de cálculo integral para calcular estas dos posiciones, pero aquí no las detallaremos.

Ahora se pueden responder las preguntas anteriores. Respecto a la Torre de Pisa, la respuesta a la pregunta de porque no se cae, es porque su centro de gravedad está geométricamente dentro de su base, que se llama "*área de sustentación*". Si la torre continúa inclinándose hasta que su centro de gravedad caiga fuera del área de sustentación, entonces se derrumbará. Pero se le han puesto apoyos en su base para evitar que continué inclinándose. Las otras preguntas ahora las puedes responder tu.

Para aplicar las condiciones de equilibrio, es recomendable seguir las siguientes instrucciones, que corresponde a dibujar el DCL del cuerpo rígido:

a) Aislar al cuerpo rígido del sistema con un límite imaginario.

b) Dibujar los vectores que representen las fuerzas en el punto de aplicación donde las fuerzas efectivamente actúan.

c) Elegir un sistema de coordenadas conveniente para descomponer las fuerzas, donde dibujar la componente perpendicular a la posición.

d) Elegir un eje de rotación *O* adecuado en el cuerpo rígido, donde se anulen los torques de (algunas) fuerzas desconocidas.

Ejemplo 6.3*: Una barra uniforme de longitud L y peso P está articulada en A en una pared. Un alambre fijo en la pared a una distancia D sobre la articulación, sujeta a la barra por el extremo superior, como se muestra en la figura 6.5a. El alambre permanece horizontal cuando se cuelga un cuerpo de peso p en el extremo superior de la barra. Calcular la tensión del alambre y la fuerza de reacción en la articulación de la barra.*

Solución: se elige como eje de rotación la articulación de la barra en la pared, en el punto A, se identifican las fuerzas que actúan sobre la barra, se dibuja el DCL de la barra (figura 6.5b) y se aplican las condiciones de equilibrio.

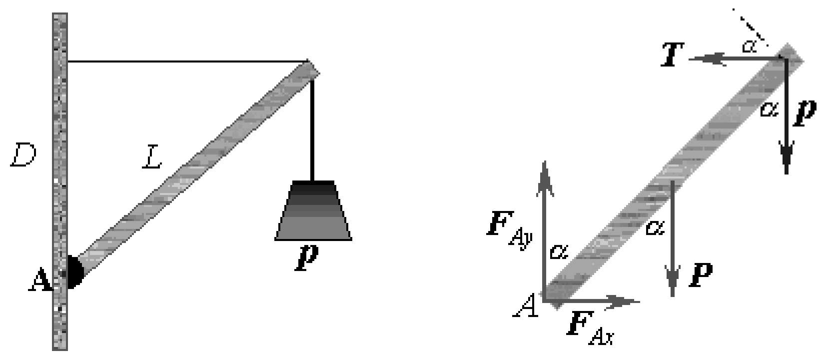


Figura 6.5 Ejemplo 6.3 a) izquierda, b) derecha.

1ª condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \;\; y \;\; \sum F_y = 0$$

eje x: $F_{Ax} - T = 0 \qquad (1)$

eje y: $F_{Ay} - P - p = 0 \qquad (2)$

2ª condición de equilibrio:

$$\sum \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_p + \tau_P = 0$$

$+T\cos\alpha\, L - p\, sen\alpha\, L - P\, sen\alpha\,(L/2) = 0 \qquad (3)$

De la geometría de la figura se obtienen $sen\alpha$ y $cos\alpha$ en términos de los valores conocidos D y L:

$$\cos\alpha = \frac{D}{L}, \quad sen\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{L}$$

que se reemplazan en (3), luego se despeja *T:*

$$T = \frac{(p + P/2)\sqrt{L^2 - D^2}}{D}$$

Ahora se calculan F_{Ax} y F_{Ay} de las ecuaciones (1) y (2).

De (1): $$F_{Ax} = T = \frac{(p + P/2)\sqrt{L^2 - D^2}}{D}$$

De (2): $F_{Ay} = P + p$

Ejercicio*:* calcular el vector fuerza en *A,* su magnitud y dirección.

Ejemplo 6.4*. En el sistema de la figura 6.6a, una fuerza horizontal* ***F,*** *cuya línea de acción pasa por el centro de un tambor de radio R y peso P, se aplica sobre el tambor, para hacerlo subir por un escalón de alto R/2. Hacer las suposiciones necesarias para calcular el valor de la: a) fuerza* ***F,*** *b) fuerza del borde del escalón en A, c) dirección de la fuerza en A.*

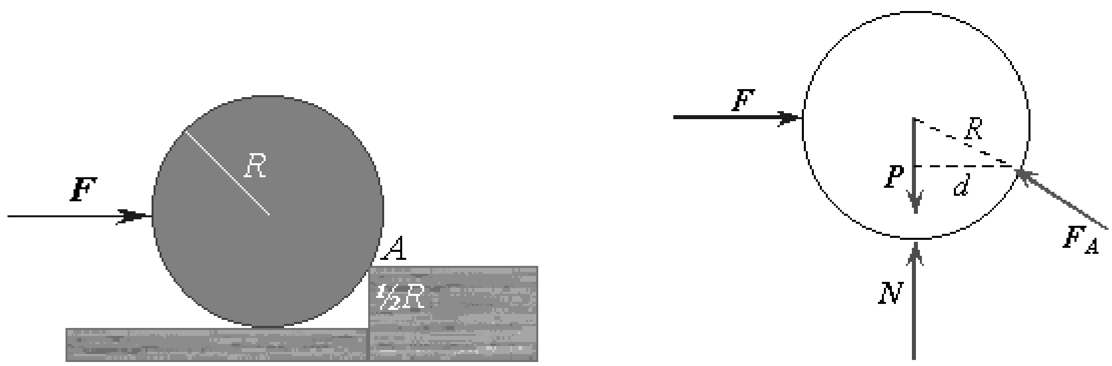


Figura 6.6 Ejemplo 6.4 a) izquierda, b) derecha.

Solución: Se conocen sólo el peso *P* y el radio del cilindro *R*. Hay que calcular la fuerza aplicada ***F*** y la fuerza del borde del escalón en A, $\boldsymbol{F_A}$.

Las condiciones de equilibrio son:

1ª condición $\sum \vec{F} = 0$ y *2ª condición* $\sum \tau_A = 0$

Se hace el DCL (figura 6.6b), se elige como eje de rotación el punto *A*, y al aplicar las condiciones de equilibrio se obtiene:

eje *x*: $F - F_{Ax} = 0$ (1)

eje *y*: $N - P + F_{Ay} = 0$ (2)

$\sum \tau_A : Pd - Nd - F(R/2) = 0$ (3)

donde *d* es la distancia perpendicular, o brazo de palanca, desde *A* hasta las fuerzas peso *P* y normal *N*, y el brazo de palanca de ***F*** es *R/2*. De la geometría de la figura, se calcula *d*:

$$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow 2d = \sqrt{3}R$$

De (3) se obtiene el valor de la fuerza aplicada:

$$(P - N)d = \frac{FR}{2} \Rightarrow (P - N)\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{FR}{2} \Rightarrow$$

$$F = \sqrt{3}(P - N)$$

De (1) : $F_{Ax} = \sqrt{3}(P - N)$

De (2): $F_{Ay} = P - N$

El vector fuerza es:

$$\vec{F}_A = F_{Ax}\hat{\imath} + F_{Ay}\hat{\jmath} = \sqrt{3}(P - N)\hat{\imath} + (P - N)\hat{\jmath}$$

Su magnitud: $\left|\vec{F}_A\right| = \sqrt{3(P-N)^2 + (P-N)^2} \Rightarrow \left|\vec{F}_A\right| = 2(P-N)$

Dirección de $\boldsymbol{F_A}$: $\tan\alpha = \dfrac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \dfrac{(P-N)}{\sqrt{3}(P-N)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^{\text{o}}$

Notar que no se conoce $\boldsymbol{N}$, se puede suponer que $\boldsymbol{N} = 0$ cuando $\boldsymbol{F}$ es la fuerza mínima para hacer subir al tambor.

6.3 APLICACIONES DEL TORQUE AL CUERPO HUMANO.

La técnica para calcular el valor de las fuerzas sobre cuerpos en equilibrio, puede ser aplicada al cuerpo humano, donde existen fuerzas en músculos, huesos y articulaciones, que permiten las diferentes posturas y movimientos.
El torque producido por la fuerza de gravedad juega un papel importante en el equilibrio de un cuerpo. La fuerza de gravedad produce un torque cero en torno al centro de gravedad (c.g.) El c.g. de una persona en posición firme está sobre una línea vertical que toca el suelo a 3 cm delante de los tobillos (figura 6.7a). Si se inclina para tocar la punta de los pies, su c.g. tiende a moverse hacia delante, más allá del área de contacto, perdiéndose el equilibrio. Para evitar esto, sus piernas y nalgas se mueven hacia atrás, con lo cual el cuerpo vuelve a estar en equilibrio (figura 6.7b). Los centros de gravedad de la mayoría de las partes del cuerpo no están encima de las articulaciones de apoyo y hacen falta fuerzas musculares para mantener el equilibrio. Es así que para mantener el equilibrio y evitar que el cuerpo vuelque hacia adelante teniendo como eje la articulación del tobillo, se necesita una fuerza aplicada por el músculo del tendón de Aquiles que va unido al tobillo (figura 6.7c).

El problema de mantener el equilibrio cuando caminamos es aún mayor. Al levantar un pie del suelo, el c.g. del cuerpo tiene que desplazarse por encima del pie apoyado. Esto exige que todo el cuerpo se mueva lateralmente. Es así que al caminar el cuerpo se mueve de un lado a otro para mantener el c.g. sobre su área de apoyo, en continuo movimiento. Una buena estabilidad se obtiene teniendo el c.g. de un objeto en una posición debajo de su área de sustentación. Para un cuadrúpedo, el área de apoyo es el área que hay entre las patas, lo cual hace que el animal tenga gran estabilidad. Si el c.g. está realmente debajo del área de apoyo se logra una gran estabilidad. A lo largo de la evolución, los animales han desarrollado posturas cada vez más inestables. La inestabilidad permite a los animales moverse más rápidamente, pero requiere un control neuromuscular complejo para mantener el equilibrio. La posición humana es tan mecánicamente inestable que a un niño le cuesta mas de un año desarrollar el control neuromuscular suficiente para mantenerse en pie sin ayuda.

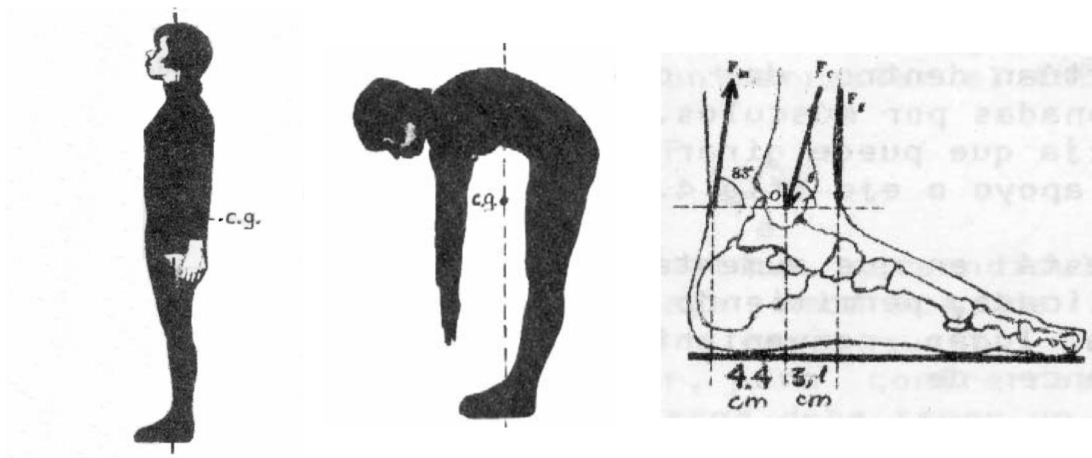


Figura 6.7 a) b) c)

La columna vertebral humana consta de 24 vértebras separadas por discos impregnados de un fluido. Cuando una persona se agacha para recoger aunque sea un objeto liviano, se produce una gran fuerza sobre el disco sacro lumbar que separa la última vértebra del sacro, el hueso que sostiene la columna vertebral. Si este disco se debilita puede deformarse o romperse y ejercer presión sobre los nervios próximos produciendo grandes dolores.

Para comprender por qué esta fuerza es tan grande podemos usar un modelo que trata la columna como una barra con pivote que corresponde al sacro (figura 6.8a). Los diversos músculos de la espalda los representaremos como un solo músculo que produce una fuerza $\vec{T}$. Si la espalda está horizontal, el ángulo α que forma respecto a la columna es aproximadamente 12º. $\vec{P}$ Representa el peso del torso, cabeza y brazos, que corresponde aproximadamente al 65% del peso total del cuerpo. Obsérvese que como el ángulo α es pequeño, la línea de acción de $\vec{T}$ pasa cerca del pivote (sacro), por lo cual su distancia perpendicular es pequeña. El peso $\vec{P}$ actúa en ángulo recto respecto a la columna y su distancia perpendicular es mucho mayor. Por lo tanto, para que se equilibren los torques, la fuerza muscular $\vec{T}$ debe ser mucho mayor que el peso $\vec{P}$.

Como $\vec{T}$ es grande, también lo es su componente horizontal, por lo tanto la fuerza $\vec{R}$ debida al sacro debe tener una componente de igual valor y sentido opuesto. La fuerza debida al sacro también debe ser mayor que el peso $\vec{P}$.

Ejemplo 6.5. *Realicemos los cálculos para una persona que pesa 700 N (masa de 70kg). El valor de P es 65% de 700 = 455N. Se supone que P y T actúan a una distancia del sacro de ½ y 2/3 del largo l de la columna (figura 6.8a). Para determinar el valor de T y R se aplican las condiciones de equilibrio.*

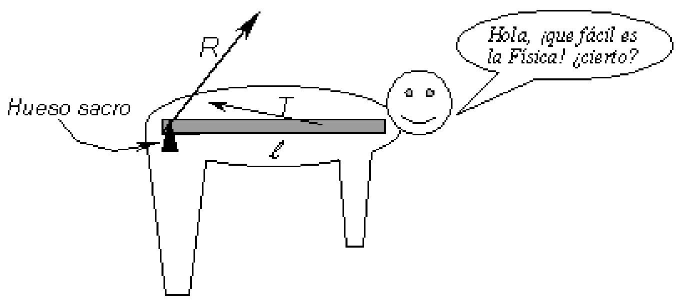
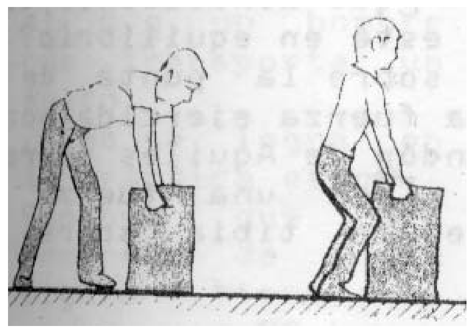


Figura 6.8 a).



b)

2ª condición de equilibrio, considerando el eje *O* en el hueso sacro:

$$\sum \tau_O = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_P = 0 \Rightarrow T sen 12 \frac{2}{3} L - P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow T = \frac{3P}{4 \times sen 12}$$

$$T = \frac{3 \times 455}{4 \times sen 12} = 1641 N$$

1ª condición de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 : R_x - T_x = 0 \Rightarrow R_x = T_x \Rightarrow R_x = T\cos 12 = 1641 \cos 12 = 1605N$$

$$\sum F_y = 0 : R_y + T_y - P = 0 \Rightarrow R_y = P - T_y = 455 - 1641\ sen 12 = 114N$$

Luego: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1605^2 + 114^2} = 1610N$

Tales fuerzas en los músculos y en el disco son potencialmente peligrosas, pues el valor de dichas fuerzas son grandes aún sin levantar un cuerpo. Si se flexionan las rodillas manteniendo la espalda vertical, los centros de gravedad de todos los pesos están aproximadamente en la vertical del sacro, por lo tanto sus torques respecto al sacro son pequeños y los músculos no deben realizar gran fuerza (figura 6.8b). La fuerza sobre el disco respectivo es entonces aproximadamente, igual al peso que sostiene. El diagrama de la figura 6.9 ilustra los valores de presión (fuerza) sobre el tercer disco lumbar, en atmósfe-ras, si la persona está de pie (A), de pie y sostiene 20kg (B), levantando co-rrectamente un bulto de 20kg (C), levantando incorrectamente un bulto de 20kg (D). Notar como aumenta la fuerza ‘lumbar’ en los distintos casos.

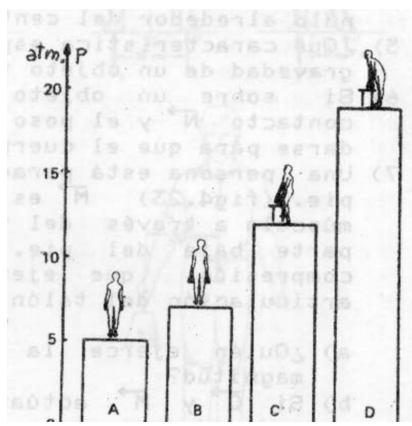


Figura 6.9

PROBLEMAS.

6.1 a) Estimar las longitudes y masas de los punteros del reloj del Campanil. b) Calcular el torque en torno al eje de rotación de los punteros debido a su peso, cuando la hora marca las: 14:00, 16:45, 18:00, otra a su gusto.

6.2 Hacer todas las suposiciones necesarias para estimar el torque que deben ejercer las raíces de un pino radiata *D. Don*, para evitar que el pino se vuelque, cuando en un temporal de invierno se inclina por efecto de la fuerza ejercida por el viento. ¿Y si la planta es un rosal?

6.3 Una fuerza $\mathbf{F} = (2i + 3j)\ N$ se aplica a un objeto que está articulado alrededor de un eje fijo alineado con el eje z. Si la fuerza se aplica en la posición $\mathbf{r} = (4i + 5j)\ m$, calcular: a) el vector torque neto en torno a z, b) la magnitud del torque neto y c) su dirección.

6.4 La figura 6.10 muestra las fuerzas $F_1=40\ N$, $F_2=30\ N$, $F_3=50\ N$, $F_4=60\ N$ aplicadas a un cuerpo rígido que puede girar en torno de un eje que pasa por O. Calcular el torque resultante. R: -10.8 Nm.

6.5 Calcular el torque neto sobre la rueda producido por las fuerzas $F_1=8\ N$, $F_2=10\ N$, $F_3=15\ N$, que se indican en la figura 6.11, alrededor de un eje que pase por su centro, si $a = 10\ cm$, $b = 20\ cm$ y $\alpha = 30º$.

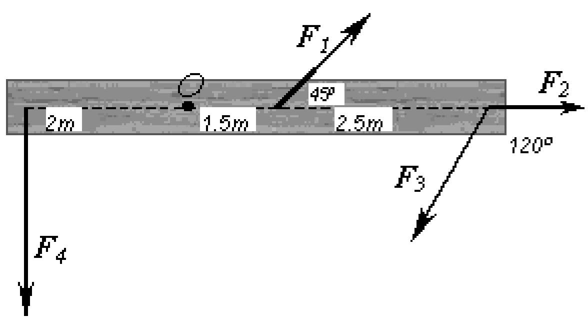


Figura 6.10 Problema 6.4

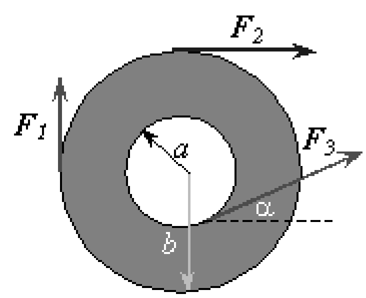


Figura 6.11 Problema 6.5

6.6 Dos fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ actúan a lo largo de los lados de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura 6.12. Encuentre una tercera fuerza $\mathbf{F_3}$ que aplicada en el vértice a lo largo del lado produzca un torque neto en torno a O igual a cero. R: $F_3 = F_1 + F_2$ (magnitudes).

6.7 Una viga uniforme de peso P y longitud L, que se apoya en los puntos O y Q soporta dos pesos, P_1 sobre O y P_2 a la derecha de Q, como se muestra en la figura 6.13. Calcular el valor de x para el cual la viga quedará equilibrada en el punto de apoyo Q de tal manera que la fuerza en O sea cero. R: $[(P_1 + P)D + ½LP_1]/P_2$.

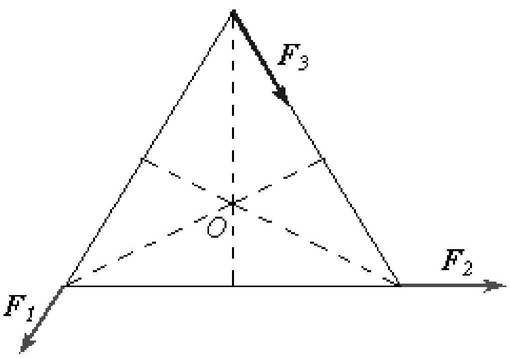


Figura 6.12 Problema 6.6

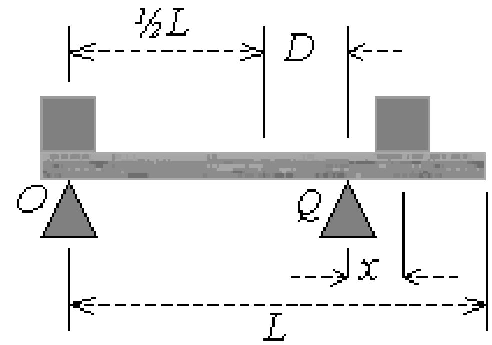


Figura 6.13 Problemas 6.7 y 6.8

6.8 Para el sistema de la figura 6.13, calcular el valor de x tal que la fuerza normal en O sea la mitad de la fuerza normal en Q. a) Desprecie el peso de la viga. b) Considere el peso P de la viga.

6.9 Un tablón uniforme de *6m* de longitud y *30kg* de masa, descansa horizontalmente sobre un andamio. Si 1.*5m* del tablón sobresale por un extremo del andamio. ¿Cuánto puede caminar un pintor de brocha gorda de 70*kg* por la parte sobresaliente antes de que el tablón se vuelque? R: 0.64 m.

6.10 Un tablón uniforme de *5 m* de largo y *150 kg* está articulado en A. En B esta sostenido por una cuerda ubicada a *1.5 m* del extremo inferior del tablón, formando un ángulo de 90º con el tablón, como se ve en la figura 6.14. Calcular la tensión de la cuerda y la fuerza de la articulación en A. R: *643 N, -514î + 1114j N*.

6.11 El tablón uniforme de la figura 6.15, de *5 m* de largo y peso P está articulado en A e inclinado α grados con la horizontal. En el extremo opuesto está sostenido por una cuerda que forma un ángulo de 90º con el tablón, sosteniendo un peso ½P. Calcular: a) la tensión de la cuerda, b) la fuerza en A. R: a) *0.6 P*, b) *(0.47î + 1.14j)P*.

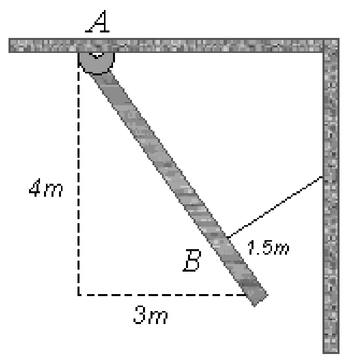


Figura 6.14 Problema 6.10

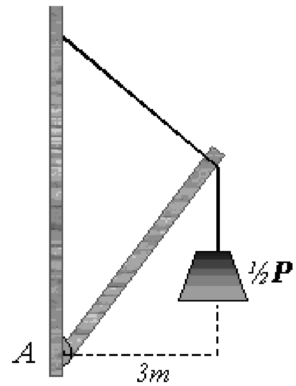


Figura 6.15 Problema 6.11

6.12 Una escalera homogénea de masa M descansa contra una pared vertical sin fricción, en un ángulo de α con la vertical. El extremo inferior se apoya sobre un piso horizontal con un coeficiente de fricción μ. Un pintor de brocha gorda de masa $2M$ intenta subir la escalera. Calcular la fracción de la longitud L de la escalera subirá el pintor antes de que la escalera empiece a resbalar. R: $(1.5\mu\, ctg\alpha - 0.25)L$.

6.13 Un tablón uniforme de 5m de longitud y 50N de peso, apernado en A es sostenido por una cuerda en su extremo superior, como se muestra en la figura 6.16. Una carga de 100 N cuelga del tablón en un punto a una distancia x de A. Si la resistencia de ruptura de la cuerda es 50 N, calcular el valor de x. Considere α = 30º y β = 60º. R: 1.29 m.

6.14 Un poste uniforme de 1200 N se sostiene por un cable, como en la figura 6.17. El poste se sujeta con un perno en A la parte inferior y en la parte superior se cuelga un cuerpo de 2000 N. Encuentre la tensión en el cable de soporte y las componentes de la fuerza de reacción en el perno en A. R: *1465 N, (1328î + 2581j) N*.

6.15 Una fuerza ***F*,** cuya línea de acción pasa por el borde superior de un tambor de radio R y peso P, se aplica sobre el tambor, para hacerlo subir por un escalón de alto ½R (figura 6.18). Calcular: a) la fuerza ***F*,** b) la fuerza del vértice del escalón en A, c) la dirección de la fuerza en A. R: a) $\left(\sqrt{3}/3\right)P$, b) $\left(\sqrt{10}/9\right)P$, c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

6.16 Un cilindro de masa *M* y radio *r* descansa sobre un plano inclinado sujetado por una cuerda tangente al cilindro y paralela a la superficie del plano. El plano esta inclinado en un ángulo α con la horizontal, como se muestra en la figura 6.19. Calcular: a) el valor mínimo del coeficiente de fricción estático, en términos de α, para que el cilindro no resbale hacia abajo del plano inclinado, b) la tensión en la cuerda en términos de *M*, *g* y α. R: a) $0.5\tan\alpha$, b) $0.5Mg\ sen\alpha$.

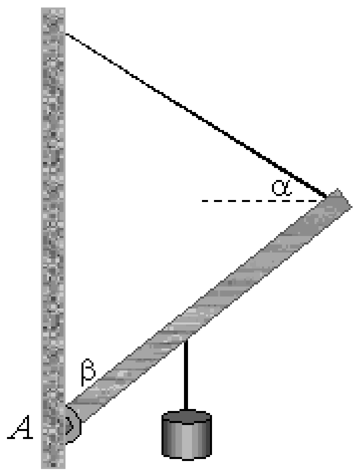


Figura 6.16 Problema 6.13

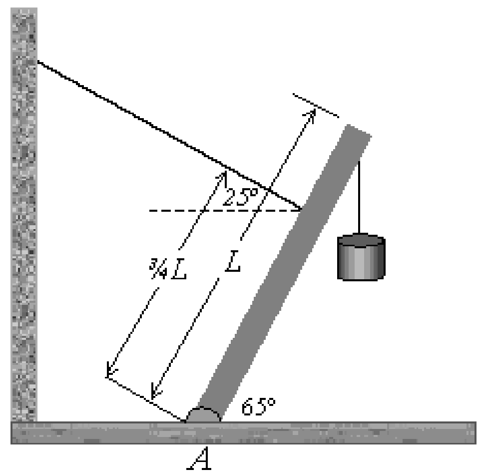


Figura 6.17 Problema 6.14

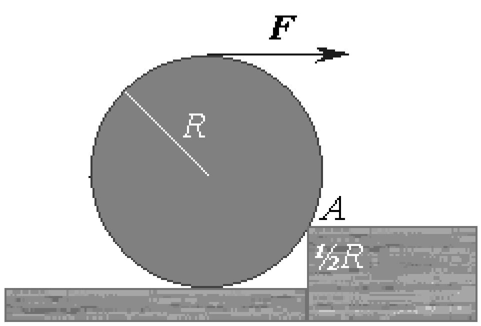


Figura 6.18 Problema 6.15

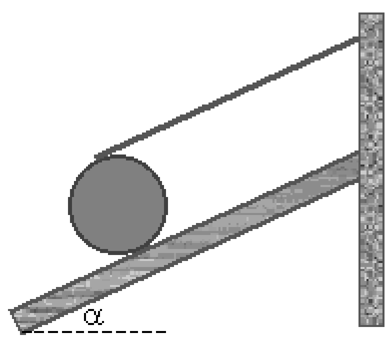


Figura 6.19 Problema 6.16

6.17 El antebrazo de la figura 6.20, está con respecto al brazo a 90° y sostiene en la mano un cuerpo de peso 70 N. Despreciando al peso del antebrazo: ¿Cuál es el torque producido por el peso de 70N alrededor de la articulación del codo (punto O)? ¿Cuál es el torque alrededor de O producido por la fuerza $\vec{F}_m$ ejercida sobre el antebrazo por el bíceps? ¿Cuál es la magnitud de $\vec{F}_m$?

6.18 Repetir el problema anterior suponiendo que el antebrazo y la mano juntos pesan 35N y que su centro de gravedad está a 15 cm de O.

6.19 Con el antebrazo en posición horizontal, tal como aparece en la figura 6.21, la mano ejerce una fuerza de 90N sobre la balanza. Hallar las magnitudes de las fuerzas F_m y F_c que ejercen sobre el antebrazo el tríceps y el húmero, (desprecie el peso del antebrazo).

6.20 Repetir el problema anterior suponiendo que el antebrazo y la mano juntos pesan 25N y que su centro de gravedad está a 18 cm de 0.

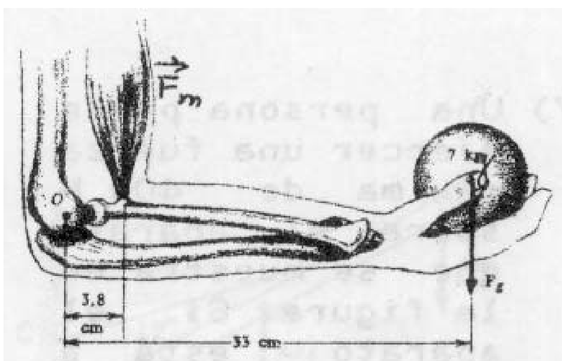


Figura 6.20 Problemas 6.17 y 6.18

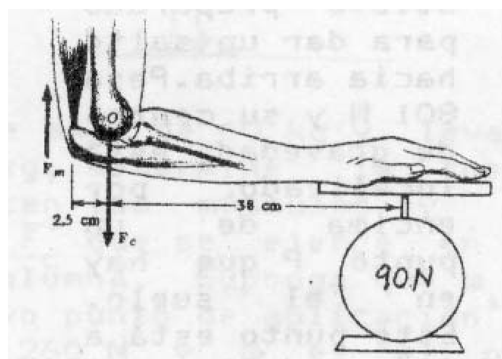


Figura 6.21 Problemas 6.19 y 6.20

6.21 Una persona puede ejercer una fuerza máxima de 400 N sobre el aparato que se muestra en la figura 6.22. Si el aparato está a 28 cm del codo, y el bíceps está unido a 5 cm del codo, ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas ejercidas por: el bíceps, el húmero.

6.22 La figura 6.23 nos muestra un atleta preparado para hacer un tiburón. Pesa 750N y su centro de gravedad está localizado por encima de un punto P que hay en el suelo. Este punto está a 0,9 m de la punta de sus pies y a 0,6m de sus hombros, ¿Cuáles son las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las manos y pies del atleta?

6.23 En el ejercicio que aparece en la figura 6.24 el torque alrededor de la rodilla ejercido por la pesa sujeta al tobillo, varía con la elevación de la pierna. Calcular el torque para las cuatro posiciones que aparecen en la figura.

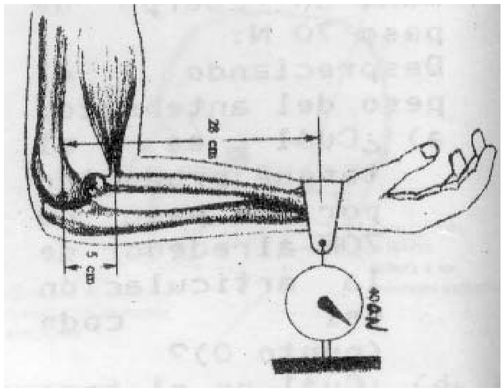


Figura 6.22 Problema 6.21

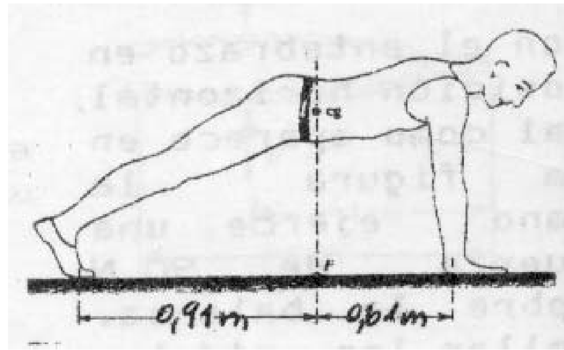


Figura 6.23 Problema 6.22.

6.24 Cuando una persona está agachada, el músculo de la espalda unido a un punto a dos tercios del sacro (eje) en un ángulo de 12º, mantiene la espina dorsal, de largo ℓ, en posición horizontal (figura 6.8). Si la parte superior del cuerpo pesa 450 N, calcular la tensión ***T*** del músculo de la espalda y la fuerza ***R*** de la espina en el sacro, cuando la persona levanta con los brazos un peso de 200 N. R: 3066 N.

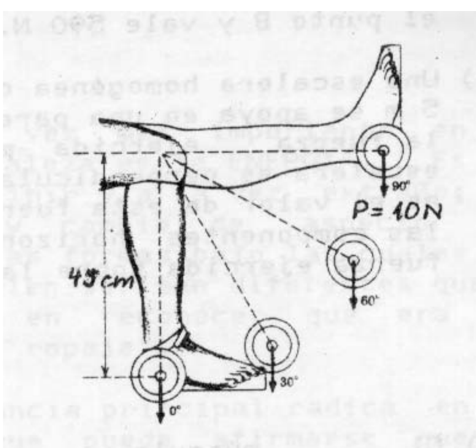


Figura 6.24 Problema 6.23

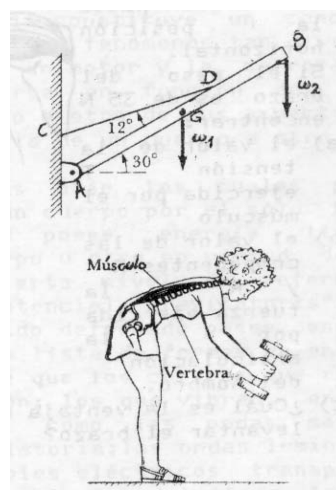


Figura 6.25 Problema 6.25

6.25 Considere el modelo mecánico de la figura 6.25 en el cual la barra AB representa la columna vertebral. El cable CD representa al grupo de músculos de la espalda que mantienen a la persona en la posición inclinada. El punto A representa el punto final de apoyo de la columna. Si la persona tiene una masa de 60 Kg, y levanta un cuerpo de masa 25 Kg, determine la fuerza de tensión $\vec{T}$ que ejercen los músculos y la fuerza de compresión $\vec{F}_c$ que se ejerce en el punto de unión de la columna. Suponga que w_1 es el peso del tronco, cuyo punto de aplicación es el punto G y vale 260 N y w_2 es el peso combinado de cabeza, brazo y objeto, actúa en el punto B y vale 590 N.

6.26 El músculo deltoides levanta el brazo hasta la posición horizontal, figura 6.26. Si el peso del brazo es 35N, calcular: el valor de la tensión T ejercida por el músculo, el valor de las componentes de R de la fuerza ejercida por la articulación del hombro.

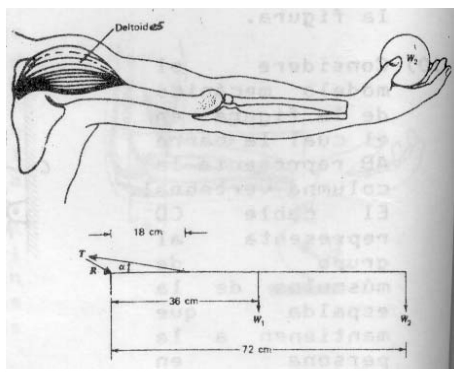


Figura 6.26 Problema 6.26.